# Matemática

## Determinantes

Professor Dudan

# DETERMINANTES

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo nxn).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de determinante.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

## Determinante de 1ª ordem

O determinante da matriz A de ordem 1 é o próprio número que origina a matriz.

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem temos que o determinante é o número real $a_{11}$

$$\mathbf{A = [a_{11}] \Rightarrow det\ A = a_{11}}$$

**Observação:** Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

**Exemplo:**

- M= [5] → det M = 5 ou I 5 I = 5
- M = [ – 3] → det M = – 3 ou I – 3 I = – 3

## Determinante de 2ª ordem

O determinante de uma matriz de segunda ordem é a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e o produto dos termos da diagonal secundária. Esses produtos se chamam, respectivamente, termo principal e termo secundário da matriz.

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

$$\textit{Sendo}\ \mathrm{M} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \textit{temos:}$$

$$\det \mathrm{M} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \underbrace{2.5}\ -\ \underbrace{4.3} = 10 - 12 \Rightarrow \det \mathrm{M} = -2$$

## Determinante de 3ª ordem

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado regra de Sarrus.

Assim:

$$\begin{array}{ccc|cc} \oplus & \oplus & \oplus & \ominus & \ominus \ \ \ominus \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$= -(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}) \quad + (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

**Exemplo:**

**1.** Calcule os determinantes das matrizes a seguir.

**a)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

**2.** Calcule $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

**3.** Calcule o valor de x, a fim de que o determinante da matriz A seja nulo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{pmatrix}$$

## PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

- Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplos:

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

- Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplos:

$$L_1 = L_3 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_3 = 2C_1$$

- Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Exemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_1 + C_2 = C_3 \qquad 2L_1 + L_2 = L_3$$

- O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad \det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

- Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Exemplos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{multiplicando} \quad C_1 \text{ por } 2: \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-4) = -8$$

$2C_1$

$$\begin{vmatrix} 5 & -10 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -145 \quad \text{Multiplicando} \quad L_1 \text{por } \frac{1}{5}: \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5}(-145) = -29$$

$\frac{1}{5}L_1$

- Caso uma matriz quadrada A seja multiplicada por um número real k, seu determinante passa a ser multiplicado por $k^n$.

**Exemplo:**

Sendo K = 3, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $K.\ A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$, temos:

$\underbrace{\det(K.A)}_{54} = \underbrace{K^n}_{3^2} . \underbrace{\det A}_{6}$

- Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$ Trocando as posições de $L_1$ e $L_2$ : $\begin{vmatrix} \boxed{2 \quad 1 \quad -1} \\ \boxed{1 \quad 2 \quad 3} \\ 3 \quad 2 \quad 1 \end{vmatrix}$ == +4

- Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ d & b & 0 \\ e & f & c \end{vmatrix} = a.b.c \qquad \begin{vmatrix} x & g & h \\ 0 & y & i \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = x.y.z$

- Para **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem n, temos que det (A.B)=det A.detB.

**Exemplo:**

Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Assim det (AB) = detA.det B= 5.2 = 10

Repare que se tivessemos feito a multiplicação matricial A.B = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$, teríamos

Det(AB) = 32 – 22 = 10 .

- Para calcular o determinante da inversa , temos $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ logo $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{4-6} = -\dfrac{1}{2}$

**CUIDADO!!!!**

$$\text{a)}\quad 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.1 & 4.2 & 4.5 \\ 4.-1 & 4.3 & 4.2 \\ 4.2 & 4.4 & 4.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 20 \\ -4 & 12 & 8 \\ 8 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{b)}\quad 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 4.[(9+8-20)-(30+8-6)]$$
$$= 4.(-3-32) = 4.(-35)$$
$$= -140$$

**4.** Calcule os determinantes abaixo usando as propriedades estudadas.

**a)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & 12 & 7 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

**5.** Se $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ calcular o det $A^T$, det $A^{-1}$ e det 2A.

**6.** Se $A = \begin{bmatrix} k & 1 & 5 \\ a & y & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ e det A =10, então det $\begin{bmatrix} 1 & k & 5 \\ y & a & 0 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ vale.

**7.** Considerando as matrizes:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \text{ e } D=\begin{pmatrix} -a & b & c \\ -g & h & i \\ -d & e & f \end{pmatrix}, \text{ se}$$

det(A) = k ≠ 0, então det(B) + det(C) + det(D) é:

**a)** 10k
**b)** 2k
**c)** 4k
**d)** 8k
**e)** 11k

**8.** Se o determinante da matriz $\begin{bmatrix} p & 2 & 2 \\ p & 4 & 4 \\ p & 4 & 1 \end{bmatrix}$ é igual a – 18, então o determinante da matriz $\begin{bmatrix} p & -1 & 2 \\ p & -2 & 4 \\ p & -2 & 1 \end{bmatrix}$ é igual a:

**a)** – 9
**b)** – 6
**c)** 3
**d)** 6
**e)** 9

**9.** Considere a matriz quadrada $A=(a_{ij})_{3x3} \mid a_{ij}=mmc(i,j)$. O determinante dessa matriz vale:

**a)** 0
**b)** 1
**c)** 6
**d)** 12
**e)** 18

Gabarito: **1.** 24 **2.** - 27 **3.** + 13 **4.** a) = 0 / b) = 0 / c) = 6 / d) = - 65 **5.** $detA^t = 26$ **6.** - 20 **7.** A **8.** E **9.** D